ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM NGỌC HOA

MỘT SỐ DẠNG CỦA ĐỊNH LÝ RITT VÀ ỨNG DỤNG VÀO VẤN ĐỀ DUY NHẤT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM NGỌC HOA

MỘT SỐ DẠNG CỦA ĐỊNH LÝ RITT VÀ ỨNG DỤNG VÀO VẤN ĐỀ DUY NHẤT

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 9 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **1. TS. Vũ Hoài An**
2. GS TSKH. Hà Huy Khoái

THÁI NGUYÊN - 2018

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Hà Huy Khoái và TS Vũ Hoài An. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Tác giả

Phạm Ngọc Hoa

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của GS. TSKH. Hà Huy Khoái và TS. Vũ Hoài An. Các thầy đã truyền cho tác giả kiến thức, kinh nghiệm học tập và sự say mê nghiên cứu khoa học. Với tấm lòng tri ân sâu sắc, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đối với hai thầy.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Đào tạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên, các Phòng Ban chức năng, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm khoa Toán cùng toàn thể giáo viên trong khoa, đặc biệt là tổ Giải tích đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường Cao đẳng Hải Dương, Phòng Ban chức năng, Phòng Đào tạo, các giảng viên trong Khoa Tự Nhiên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, bạn bè trong các Seminar tại Bộ môn Toán Giải tích và Toán ứng dụng Trường Đại học Sư phạm- Đại học Thái Nguyên, Trường Đại học Thăng Long và Trường Cao đẳng Hải Dương đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới những người thân trong gia đình, đặc biệt là chồng cùng hai con trai, những người đã chịu nhiều khó khăn, vất vả và dành hết tình cảm yêu thương, động viên, chia sẻ, khích lệ để tác giả hoàn thành được luận án.

Tác giả

Phạm Ngọc Hoa

Mục lục

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

- $Bi - URSM$: song tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình (bi-unique range set for meromorphic functions)
- $E_f(S)$: nghịch ảnh của tập S qua hàm f, có tính bội
- $\overline{E}_f(S)$: nghịch ảnh của tập S qua hàm f, không tính bội
- gcd: ước chung lớn nhất (greatest common divisor)
- $\mathcal{M}(\mathbb{K})$: trường các hàm phân hình trên $\mathbb{K}$
- $O(1)$: đại lượng bị chặn.
- $O(r)$: đại lượng vô cùng lớn cùng bậc với r khi $r \to +\infty$.
- $o(r)$: đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn r khi $r \to +\infty$.
- $URSE$: tập xác định duy nhất đối với hàm nguyên (unique range set for entire functions)
- $URSM$: tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình (unique range set for meromorphic functions)

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Định lý cơ bản của lý thuyết số phát biểu rằng mọi số nguyên $n \geq 2$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng tích các số nguyên tố có dạng

$$n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}, \text{ với } k \geq 1,$$

ở đó các thừa số nguyên tố $p_1, ..., p_k$ đôi một phân biệt và các số mũ tương ứng $m_1 \geq 1, ..., m_k \geq 1$ được xác định một cách duy nhất theo n. Ritt là người đầu tiên tương tự định lý này đối với các đa thức.

Để mô tả kết quả của Ritt, ta kí hiệu $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (tương ứng, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) là tập các hàm phân hình (nguyên) trên $\mathbb{C}$ và kí hiệu $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ là tập các đa thức bậc 1. Đặt $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ là các tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, khi đó một hàm phân hình $F(z)$ được gọi là *không phân tích được* trên $\mathcal{E}\times \mathcal{F}$ nếu bất kỳ cách viết thành nhân tử $F(z) = \varphi_1 \circ \varphi_2(z)$ với $\varphi_1(z) \in \mathcal{E}$ và $\varphi_2(z) \in \mathcal{F}$ đều kéo theo hoặc φ_1 là tuyến tính hoặc φ_2 là tuyến tính. Năm 1922, Ritt [46] đã chứng minh định lý sau.

Định lý A (Định lý thứ nhất của Ritt). *Cho $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{C}[z] \setminus \mathcal{L}(\mathbb{C})$. Nếu một đa thức $F(z)$ có hai cách phân tích khác nhau thành các đa thức không phân tích được trên $\mathcal{F}\times \mathcal{F}$:*

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \varphi_r = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \cdots \psi_s,$$

thì $r = s$, và bậc của các đa thức ψ_i là bằng với bậc của các đa thức φ_i nếu không tính đến thứ tự xuất hiện của chúng.
Cũng trong [46], Ritt đã chứng minh định lý sau.

Định lý B (Định lý thứ hai của Ritt). *Giả sử rằng $\varphi, \alpha, \psi, \beta \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ thỏa mãn*

$$\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta \textit{ và } \gcd(\deg(\varphi); \deg(\psi)) = \gcd(\deg(\alpha); \deg(\beta)) = 1.$$

Khi đó tồn tại các hàm tuyến tính $l_j \in \mathbb{C}[x]$ sao cho $(l_1 \circ \varphi \circ l_2, l_2^{-1} \circ \alpha \circ l_3, l_1 \circ \psi \circ l_2, l_4^{-1} \circ \beta \circ l_3)$ có một trong các dạng

$$(F_n, F_m, F_m, F_n) \textit{ hoặc}$$

$$(x^n, x^s h(x^n), x^s h(x)^n, x^n),$$

ở đó $m, n > 0$ là nguyên tố cùng nhau, $s > 0$ là nguyên tố cùng nhau với n, và $h \in \mathbb{C}[x] \setminus x\mathbb{C}[x]$, l_j^{-1} là hàm ngược của l_j, F_n, F_m là các đa thức Chebychev.

Từ đó, theo hướng tiếp cận đại số đã có rất nhiều các tác giả nghiên cứu về phép phân tích các đa thức trong các định lý của Ritt như M.F.Coste-Roy [14], F.Dorey và G. Whaples [15], H.T.Engstrom [16], H.Levi [37],.... Chẳng hạn, năm 1941 Engstrom [16] và năm 1942 Levi [37] đã chứng tỏ rằng Định lý B vẫn còn đúng trên một trường bất kỳ đặc số không.

Trên phương diện giải tích, ta thấy rằng Định lý thứ hai của Ritt mô tả các nghiệm của phương trình $\varphi(\alpha) = \psi(\beta)$, ở đó $\varphi, \alpha, \psi, \beta$ là các đa thức và bậc của các đa thức là nguyên tố cùng nhau. Rõ ràng phương trình đa thức được Ritt nghiên cứu là trường hợp riêng của phương trình hàm $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là các đa thức và f, g là các hàm phân hình. Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như Tạ Thị Hoài An-Nguyễn Thị Ngọc Diệp [4], H.Fujimoto [20], Hà Huy Khoái-C.C.Yang [34], F.Pakovich [44], C.C.Yang-X.H.Hua [51], ...

Để ý rằng, phương trình hàm liên quan mật thiết đến vấn đề xác định duy nhất đối với hàm phân hình-một ứng dụng của lý thuyết phân bố giá trị. Vấn đề xác định duy nhất đã được nghiên cứu lần đầu tiên bởi R.Nevanlinna. Năm 1926, R.Nevanlinna đã chứng minh được rằng: Với hai hàm phân hình f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, nếu chúng có chung nhau ảnh ngược (không tính bội) của 5 điểm phân biệt thì $f = g$ (Định lý 5 điểm) và nếu chúng có chung nhau ảnh ngược (có tính bội) của 4 điểm phân biệt thì $g = \dfrac{af + b}{cf + d}$ (a, b, c, d là các số phức nào đó sao cho $ad - bc \neq 0$)(Định lý 4 điểm). Khởi nguồn từ Định lý 5 điểm và Định lý 4 điểm, vấn đề duy nhất đã được nghiên cứu liên tục với hai hướng nghiên cứu chủ yếu và đã có rất nhiều kết quả sâu sắc của G.Dethloff, Đỗ Đức Thái, M. Shirosaki, H.X.Yi, P.C.Hu-C.C.Yang, Hà Huy Khoái, Hà Huy Khoái-Vũ Hoài An, Hà Huy Khoái-Vũ Hoài An-Lê Quang Ninh, Tạ Thị Hoài An, Tạ Thị Hoài An-Hà Trần Phương, L.Lahiri, Trần Văn Tấn, Sĩ Đức Quang, A.Escassut, H.Fujimoto,...

Tiếp theo, sự nghiên cứu được mở rộng sang một nhánh của lý thuyết xác định duy nhất đó là xem xét tập xác định duy nhất của các đa thức vi phân. Và người đầu tiên khởi xướng cho hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman đã chứng minh một kết quả nổi tiếng rằng một hàm phân hình f trên trường số phức $\mathbb{C}$ không nhận giá trị 0 và đạo hàm bậc k

của f, với k là số nguyên dương, không nhận giá trị 1 thì f là hàm hằng. Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau.

Giả thuyết Hayman. [22] *Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn điều kiện $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là số nguyên dương và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hàm hằng.*

Giả thuyết này đã được chính Hayman kiểm tra với $n > 1$ và được Clunie kiểm tra với $n \geq 1$. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành một hướng nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman. Công trình quan trọng thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về Yang-Hua [51], hai ông đã nghiên cứu vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và đơn thức vi phân của nó có dạng f^nf'. Hai ông đã chứng minh được rằng, với f và g là hai hàm phân hình khác hằng, n là số nguyên, $n \geq 11$ nếu f^nf' và g^ng' cùng nhận giá trị phức a tính cả bội thì hoặc f, g sai khác nhau một căn bậc $n+1$ của đơn vị, hoặc f, g được tính theo các công thức của hàm mũ với các hệ số thỏa mãn một điều kiện nào đó. Từ đó, các kết quả tiếp theo đã nhận được dựa trên xem xét các đa thức vi phân dạng $(f^n)^{(k)}$, $[f^n(f-1)]^{(k)}$ (Bhoosnurmath - Dyavanal [11], Fang [19]) và có dạng $[f^n(af^m+b)]^{(k)}$, $[f^n(f-1)^m]^{(k)}$ (xem Zhang và Lin [53]), và có dạng $(f)^{(')}P^{'}(f)$ (xem K. Boussaf- A. Escassut- J. Ojeda[12]).

Năm 1997, thay vì nghiên cứu các đạo hàm bậc n, I. Lahiri [35] đã nghiên cứu các trường hợp tổng quát hơn của các đa thức vi phân không tuyến tính của các hàm phân hình nhận giá trị 1 tính cả bội. Theo hướng nghiên cứu này, năm 2002 C. Y. Fang và M. L. Fang [18] đã chứng minh rằng, nếu $n \geq 13$, và đối với hai hàm phân hình khác hằng f và g, mà $f^{(n)}(f-1)^2f'$ và $g^{(n)}(g-1)^2g'$ nhận giá trị 1 tính cả bội, thì $f = g$. Vào cuối những năm của thập kỷ này, vấn đề nhận giá trị cũng được xem xét đối với đa thức sai phân của các hàm nguyên và các hàm phân hình. Laine và Yang [36] đã nghiên cứu vấn đề phân bố giá trị của tích sai phân đối với các hàm nguyên. X. C.-Qi, L.-Z. Yang và K. Liu [45] xem xét các tích sai phân và vi phân có dạng $f(z)^{(n)}f(z+c)$, và đã chỉ ra điều kiện để $f = tg$, với f và g là hai hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn.

Năm 2008, xuất phát từ Định lý thứ hai của Ritt, F.Packovich [43] có ý tưởng xét ảnh ngược của hai tập compact đối với hai đa thức. Ông đã tìm được điều kiện cho hai đa thức f_1, f_2 và hai tập compact K_1, K_2 thỏa mãn $f_1^{-1}(K_1) = f_2^{-1}(K_2)$. Từ Định lý thứ hai của Ritt và kết quả của F.Pakovich nói trên chúng tôi có nhận xét.

Nhận xét. Định lý thứ hai của Ritt có thể được xem là kết quả đầu tiên về vấn đề xác định hàm từ phương trình hàm $P(f) = Q(g)$, từ đó sinh ra các kết quả cho Vấn đề xác định đa thức thông qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm.

Từ nhận xét này và các kết quả về phương trình hàm (xem [4], [34], [44]) nêu trên, vấn đề nghiên cứu được đặt ra tự nhiên như sau.

Vấn đề 1. Xem xét sự tương tự hai định lý Ritt đối với hàm phân hình và đa thức vi phân.

Vấn đề 2. Xem xét vấn đề xác định hàm, vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình và đa thức vi phân dưới góc độ Định lý thứ hai của Ritt.

Vấn đề 3. Xem xét vấn đề xác định hàm, vấn đề duy nhất đối với tích q-sai phân, đa thức vi phân của hàm phân hình dưới góc độ Định lý thứ hai của Ritt.

Từ đó, chúng tôi chọn đề tài: "Một số dạng của Định lý Ritt và ứng dụng vào vấn đề duy nhất" để giải quyết các vấn đề nghiên cứu trên đây, đồng thời góp phần làm phong phú thêm các kết quả và ứng dụng của Lý thuyết Nevanlinna.

2. Mục tiêu của luận án

2.1. Thiết lập một số định lý tương tự hai định lý của Ritt đối với hàm phân hình và đa thức vi phân, đa thức sai phân, đa thức q-sai phân trong trường hợp phức và p-adic.

2.2. Tiếp cận Vấn đề xác định hàm, Vấn đề duy nhất đối với hàm phân hình, đa thức vi phân, đa thức sai phân, đa thức q-sai phân trong trường hợp phức và p-adic dưới góc độ của hai định lý Ritt.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Vấn đề xác định hàm phân hình và đa thức vi phân, đa thức sai phân, đa thức q-sai phân trong trường hợp phức và p-adic dưới góc độ của hai định lý Ritt.

Vấn đề duy nhất của hàm phân hình và đa thức vi phân, đa thức sai phân, đa thức q-sai phân trong trường hợp phức và p-adic dưới góc độ của hai định lý Ritt.

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Sử dụng hai định lý chính và các tương tự của chúng cùng với các kiểu Bổ đề Borel của Lý thuyết phân bố giá trị để giải các phương trình hàm. Các phương trình hàm này tương tự như phương trình hàm trong Định lý